El Tiro Parabólico

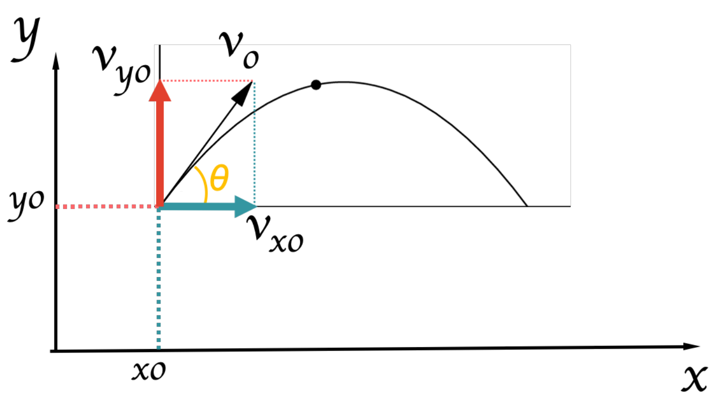
Solución analítica en dos dimensiones:

Durante un tiro o lanzamiento de una partícula (pelota u objeto) la Tierra ejerce una fuerza $F(y)$ sobre nuestra partícula que está dada por la siguiente ecuación:

$$F(y) = mg \tag{1}$$

en donde m es la masa del objeto y g es la aceleración de la gravedad que aproximamos como una constante (g) y únicamente tiene componente en y.

Podemos intuir que nuestra partícula sale con una velocidad inicial $\vec{v}$, va a llegar a cierta altura en dirección vertical al plano de la tierra (y) hasta que cambia de dirección (en y) y regresa a la tierra. La velocidad de la partícula en el eje x (horizontal al plano de la tierra) será constante dado que no hay fuerzas que actúen en esa dirección.



$F(y)$ es la única fuerza —la fuerza total— que actúa sobre la pelota que se mueve del punto 1 al punto 2.

La **solución** de este problema consiste en encontrar las ecuaciones que describen: **(1)** las posiciones de mi partícula en x y y como función del tiempo dadas una velocidad inicial total (v_0) y un ángulo de lanzamiento (θ) y **(2)** las velocidades de mi partícula en x y y. Además vamos a revisar qué pasa con **(3)** la energía cinética (K) y **(4)** la energía potencial (V) de nuestra partícula como función del tiempo y de las posiciones.

1. Solución para las posiciones en x y y.

Para x:

La velocidad inicial en (v_x) está dada por el componente en x de la velocidad inicial total, es decir, v_0 por el coseno del ángulo de lanzamiento:

$$v_{0x} = v_0 \ \cos(\theta) \tag{2}$$

La velocidad, en este caso v_x, esta definida como la derivada de la posición (en x) con respecto al tiempo.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \tag{3}$$

resolver esta ecuación quiere decir encontrar el valor de x, así que despejamos (o diferenciamos) dx

$$dx = v_x \ dt \tag{4}$$

e integramos ambos lados de nuestra ecuación para obtener la solución para x

$$\int_1^2 dx = \int_0^t v_x \ dt \tag{5}$$

resolvemos las integrales de la ecuación anterior y obtenemos que:

$$x - x_0 = v_x \ t \tag{6}$$

$$x = x_0 + v_x \ t \tag{7}$$

Para y:

La velocidad inicial en y estará dada por la velocidad inicial de lanzamiento multiplicada por el seno del ángulo. No hay que olvidar que en y vamos a tener que tomar en cuenta la gravedad que actúa sobre la partícula.

La aceleración está definida como:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \tag{8}$$

para determinar la velocidad tenemos que despejar v_y

$$dv_y = a_y \; dt \tag{9}$$

para poder integrar ambos lados de la ecuación necesitamos saber quién es a_y y si depende de y o de t.

De forma general, la aceleración está dada por el conjunto de fuerzas, que actúan sobre nuestro objeto.

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{10}$$

despejamos la aceleración,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{11}$$

En nuestro ejemplo del tiro parabólico, sabemos que a es una constante $(-9.81m/s^2)$, así que podemos sacarla de la integral

$$\int_{vy0}^{v} dv_y = \int_0^t a_y \; dt \tag{12}$$

al resolver nuestra ecuación y despejar $v - y$ nos queda:

$$v_y = v_{y0} + a_y \; t \tag{13}$$

donde la velocidad inicial v_{y0} está dada por el componente en y de v_0

$$v_{y0} = v_0 \ \sin(\theta) \tag{14}$$

Para obtener una función para las posiciones en y vamos a utilizar la definición de la velocidad —de la misma forma que hicimos para x—, v_y está definida como cuánto cambia la posición en y con respecto al tiempo.

$$v_y = \frac{dy}{dt} \tag{15}$$

De nuevo, resolver esta ecuación quiere decir encontrar y, así que despejamos (o diferenciamos) dy

$$dy = v_y \ dt \tag{16}$$

e integramos ambos lados de nuestra ecuación para obtener la solución para y

$$\int_{y0}^{y} dy = \int_{0}^{t} v_y \ dt \tag{17}$$

Para integrar el lado derecho, necesitamos saber quién es v_y, ya sabemos que no es una constante porque sobre este eje actúa la aceleración de la gravedad. De tal forma, tenemos que sustituir el valor de v_y que obtuvimos en la ecuación 13

$$\int_{1}^{2} dy = \int_{0}^{t} (v_{y0} + a_y \ t) \ dt \tag{18}$$

resolvemos las integrales

$$y - y_0 = v_{y0} \ t + \frac{1}{2} a_y \ t^2 \tag{19}$$

y despejamos y:

$$y = y_0 + v_{y0} \ t + \frac{1}{2} a_y \ t^2 \tag{20}$$

Graficamos las soluciones para las posiciones y las velocidades en las siguientes condiciones iniciales:

- $v_0 = 100(km/h)$
- $\theta = 40 grados$
- $m = 142g$

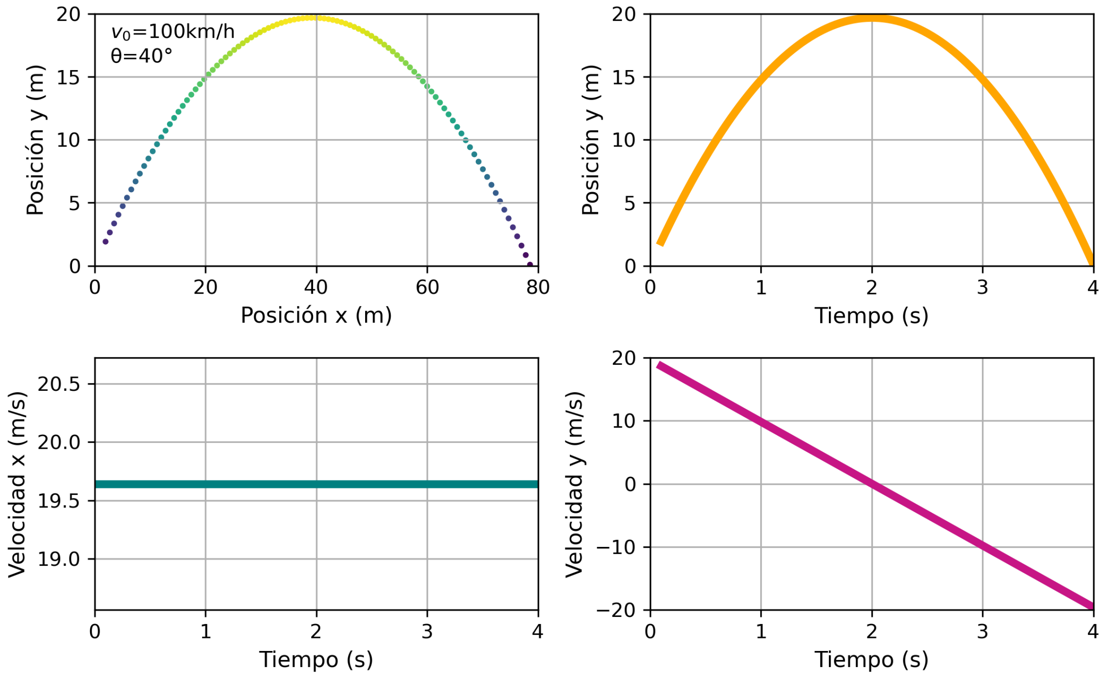


Figure 1: Gráficas de: posiciones x y y (arriba izquierda), posición en y contra tiempo (arriba derecha), velocidad en x (izquierda abajo), y velocidad en y (derecha abajo) para el lanzamiento de una partícula con una masa (m) de 142g con una velocidad inicial (v_0) de 100(Km/h) y un ángulo de lanzamiento (θ) de 40 grados.

2. La energía cinética y energía potencial

Como se describió anteriormente, la energía cinética (K) es igual a

$$K = \frac{1}{2}m\ v^2 \tag{21}$$

tenemos la solución para las velocidades, así que podemos directamente calcular K y hacer una gráfica. Hay que tomar en cuenta que tenemos dos componentes de la velocidad, así que

$$K = \frac{1}{2}m\ (v_x^2 + v_y^2) \tag{22}$$

Por otro lado para calcular la energía potencial tenemos que

$$W = -\int_1^2 dV = \int_1^2 F_y \cdot dy \tag{23}$$

de newton sabemos que la fuerza en y es igual a

$$F_y = mg \tag{24}$$

y por tanto

$$-\int_1^2 dV = \int_{y_1}^{y_2} mg\ dy \tag{25}$$

resolvemos nuestras integrales para obtener que:

$$V_2 - V_1 = -mg\ (y_2 - y_1) \tag{26}$$

definimos la referencia como $V_1 = 0$ y a la posición inicial $y_1 = 0$

$$V = -mgy \tag{27}$$

Finalmente, la energía total será la suma de la energía cinética y la energía potencial

$$E_{tot} = K + V = \frac{1}{2}m\ (v_x^2 + v_y^2) - mgy \tag{28}$$

Las gráficas de Energías Cinética, Potencial y Total nos van a mostrar que la Energía Total durante el lanzamiento se conserva.

Cuando lanzamos nuestra partícula, la energía cinética (en morado) empieza a disminuir conforme la partícula pierde velocidad. Por otro lado, la energía potencial va aumentando hasta que la partícula cambia de dirección y empieza la pérdida de energía potencial. La energía total del sistema, definida como la suma de energía cinética y energía potencial se mantiene constante.

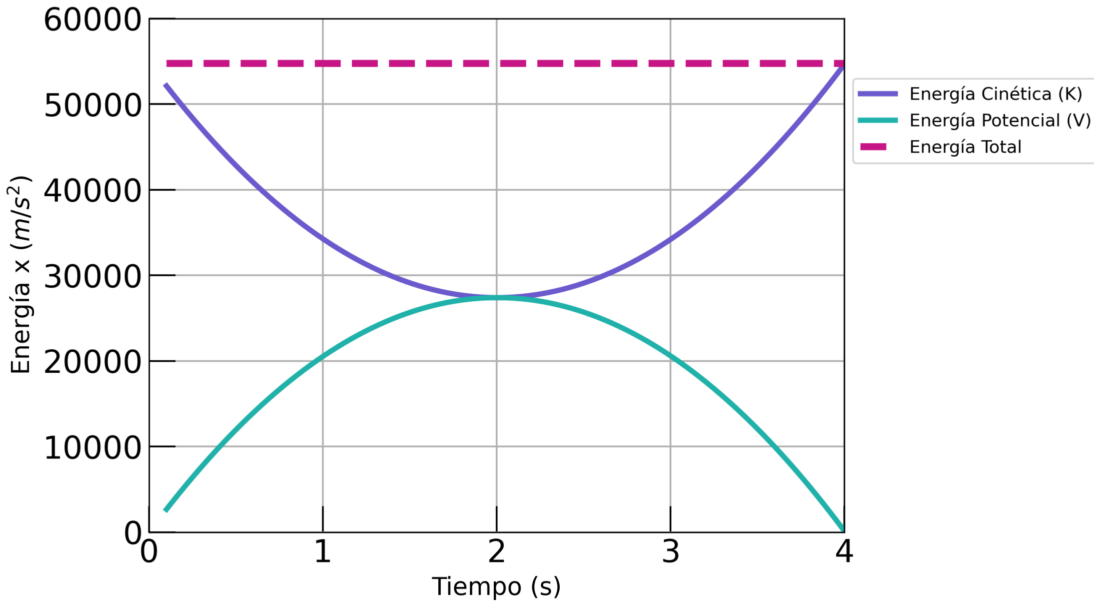


Figure 2: Gráfica de Energía Cinética, Energía Potencial y Energía Total cuando lanza una partícula con una masa (m) de 142g con una velocidad inicial (v_0) de 100(Km/h) y un ángulo de lanzamiento (θ) de 40 grados.