Potenciales de Interacción

Existe una importante relación entre las fuerzas que actúan sobre una partícula ($\vec{F}$), el trabajo (W) como moneda de cambio de energía, su energía cinética (K) y energía potencial (V).

El **trabajo** (W) en mecánica clásica lo podemos ver como la acumulación (suma) de la fuerza que utilizamos para desplazar un objeto. Tomando en cuenta que la fuerza puede cambiar como función de la posición del objeto, el trabajo (W) lo tenemos que definir como una integral.

$$W = \int_1^2 \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \tag{1}$$

El trabajo es una magnitud escalar y se expresa en unidades de energía, Joules (J). Es interpretado como la energía que nos cuesta llevar un objeto de un lugar a otro, es decir, del punto 1 al 2. Típicamente el trabajo es diferente para cada movimiento y muchas veces el mismo trabajo W depende de la trayectoria que se utiliza para llevar el objeto del punto 1 al 2. Por ejemplo se podría tomar una trayectoria más larga, un camino en subida, un atajo, etc.

De forma general, la fuerza (F) en la segunda ley de Newton está definida como:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2}$$

Para trabajar en tres coordenadas —que es lo más usual— la aceleración la tenemos que definir en cada una de ellas (x, y y z):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3}$$

De tal forma, podemos sustituir la aceleración ($\vec{a}$) de nuestra segunda ley de Newton (2) con las aceleraciones expresadas en las ecuaciones 3 para obtener una expresión más detallada de las fuerzas en cada coordenada:

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt}, \quad F_y = m\frac{dv_y}{dt}, \quad F_z = m\frac{dv_z}{dt} \tag{4}$$

utilizamos las propiedades de las derivadas para hacer un cambio de variable que nos ayudará a resolver estas ecuaciones. Por conveniencia vamos a continuar trabajando en una coordenada (x) pero las mismas ecuaciones se deben seguir para resolver y y z

$$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{5}$$

(dx/dt) no es más que la definición de la velocidad en x. Así que podemos sustituir la velocidad v_x en la ecuación 5 y sustituir el resultado en la ecuación 4.

$$F_x = m\left(\frac{dv_x}{dx}\right)v_x \tag{6}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, conviene dejar todo lo que tenga que ver con las posiciones de un lado de la ecuación y lo que tenga que ver con el tiempo del otro lado,

$$F_x dx = mv_x \, dv_x \tag{7}$$

integramos ambos lados de nuestra ecuación. De forma interesante, nos queda del lado izquierdo el trabajo mecánico!

$$W = \int_1^2 F_x dx = \int_1^2 mv_x \, dv_x \tag{8}$$

Sin olvidar que estábamos trabajando en tres coordenadas (x, y y z), el trabajo será la suma de las integrales para cada una de las coordenadas y nos queda de la siguiente forma:

$$W = \int_1^2 mv_x \, dv_x + \int_1^2 mv_y \, dv_y + \int_1^2 mv_z \, dv_z \tag{9}$$

Las integrales se pueden resolver de forma sencilla, tenemos la integral de una función por su derivada evaluada entre 1 y 2. Así que como resultado tenemos:

$$W = \frac{1}{2}m(v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2 + v_{z_2}^2) - \frac{1}{2}m(v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2) \tag{10}$$

ya sabemos que serán muy útiles estas cantidades. De aquí viene la definición de la *energía cinética* K de una partícula!

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \tag{11}$$

en nuestras tres coordenadas tenemos:

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{12}$$

El segundo término del lado derecho de nuestra ecuación 10 es la energía cinética final K_2 y el primer término será la energía cinética inicial, K_1. De tal forma, el cambio en la energía cinética es ΔK

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K \tag{13}$$

Este es el **teorema del trabajo-energía** y nos dice que el trabajo hecho por una fuerza aplicada sobre una partícula provoca un cambio en su energía cinética.

Históricamente primero se ideó el principio de la **conservación de la energía**. Esta idea viene de pensar en cómo es que se conserva la energía en un objeto que se mueve. Como resultado vamos a encontrar que un objeto puede tener cierta energía cinética (K) y cuando se desplaza o se mueve modifica su energía cinética y acumula **energía potencial (V)**.

Además de la energía cinética tenemos otro tipo de energía en mecánica clásica. Y el ejemplo perfecto para estudiar la conservación de energía es el tiro vertical. Cuando lanzamos un objeto al aire en dirección perpendicular al plano de la tierra (z), sale con una velocidad inicial (v_z) que va disminuyendo con el tiempo y por tanto disminuye también su energía cinética. El objeto continúa subiendo hasta que alcanza el punto más alto en el aire, cambia la dirección del movimiento empieza a aumentar la energía cinética del objeto hasta que regresa a la tierra.

La pregunta es ¿qué pasa con la conservación de la energía?, es decir, ¿qué pasa con la energía cinética que el cuerpo pierde cuando sube más y más alto? La reducción de energía cinética del cuerpo se acompaña de un incremento correspondiente en **energía potencial**. Conforme el cuerpo cae de regreso a la tierra, va ganando de nuevo energía cinética y mientras pierde una cantidad correspondiente de energía potencial.

La fuerza que actúa sobre una partícula (en un tiro en z) depende únicamente de la posición de la partícula y no de su velocidad, del tiempo, o de cualquier otra variable. La fuerza es únicamente función de las posiciones $\vec{F} = f(x, y, z)$ —a este tipo de fuerzas se les llama **fuerzas conservativas**.

La energía potencial es la energía mecánica asociada a la localización de una partícula dentro de un campo de fuerzas y es una consecuencia de que el sistema de fuerzas que actúa sobre el mismo sea conservativo. De tal forma, definimos la energía potencial $V(x, y, z)$ como una función de x, y y z cuyas derivadas parciales satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$F_x \equiv -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y \equiv -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z \equiv -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{14}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \tag{15}$$

Independientemente del origen de la fuerza, la energía potencial que tiene nuestro sistema será la energía *almacenada* debido a su posición o configuración. A diferencia de la energía cinética que viene del movimiento de la partícula.

En un sistema donde únicamente actúan fuerzas conservativas, la suma de energía cinética y energía potencial es constante, de hecho por eso se le da el nombre a las fuerzas conservativas: son las fuerzas que hacen que la energía total se conserve.

Al revisar nuestra ecuación 15, resulta evidente que lo que nos interesa es el valor del cambio en la energía potencial y este cambio depende únicamente del punto de partida o de referencia que se utilizó para medirla. Únicamente importa la variación de la energía potencial entre las configuraciones de interés. De tal forma, es posible fijar el nivel cero de energía potencial en cualquier lugar.

Recordamos de la sección anterior la definición de **trabajo** y su descomposición para un sistema descrito en tres coordenadas

$$W = \int_1^2 F_x \; dx + \int_1^2 F_y \; dy + \int_1^2 F_z \; dz \tag{16}$$

sustituimos las fuerzas (14) en la definición de trabajo 16 para obtener:

$$W = -\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial x} dx - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial y} dy - \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial z} \; dz \tag{17}$$

V es únicamente función de las posiciones $V = V(x, y, z)$ así que la derivada total de V es:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} \; dz \tag{18}$$

Y el trabajo (W) será entonces el negativo de la integral de la derivada del potencial entre 1 y 2. Cuyo resultado es $-(V_2 - V_1)$

$$W = -\int_1^2 dV = -(V_2 - V_1) = V_1 - V_2 \tag{19}$$

Regresando a la energía cinética, habíamos definido el trabajo W en términos de la energía cinética de las partículas como:

$$W = K_2 - K_1 \tag{20}$$

Igualamos las ecuaciones 20 y 19 para obtener:

$$K_2 - K_1 = V_1 - V_2 \tag{21}$$

Y de forma general llegamos a la conservación de la energía mecánica.

$$K_1 + V_1 = K_2 + V_2 \tag{22}$$

La suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula permanece constante durante el movimiento. Esto se cumple únicamente cuando sólo actúan fuerzas conservativas sobre la partícula.

$$E_{mec} = K + V \tag{23}$$

Para aclarar con dos ejemplos los conceptos y la relación entre el trabajo, la energía cinética y la energía potencial tenemos dos clásicos: **(1)** el tiro parabólico, con el campo gravitatorio que ejerce la tierra sobre un objeto y **(2)** el oscilador armónico descrito como una masa unidas a un resorte que se verá en el siguiente capítulo.